ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d' ADMISSION 1982

EPREUVES ECRITES d' ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

L'USAGE DES TABLES NUMERIQUES, DES REGLES A CALCUL ET DES CALCULATRICES ELECTRONIQUES PORTATIVES, NON IMPRIMANTES, A ALIMENTATION AUTONOME ET SANS DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT, EST AUTORISE.

- *Les copies illisibles, mal présentées ou mal rédigées seront inévitablement pénalisées.*
- *Chaque candidat doit traiter les quatre exercices de l'épreuve. Ces quatre exercices sont indépendants.*
- *Chaque candidat indiquera sur chaque copie le numéro de celle-ci et le nombre total de copies rendues.*
- *De plus, pour les candidats originaires des classes T.A., la numérotation des pages sera précédée de l'indication T.A.*

Les candidats originaires des "classes T.A." n'ont pas à traiter les questions précédées d'un astérisque.

PREMIER EXERCICE

1°/ Soit φ un nombre réel et soit n un entier strictement positif.

a) Résoudre dans le corps des complexes l'équation :

$$x^{2n} - 2\,x^n \cos\varphi + 1 = 0 .$$

b) En déduire la décomposition en facteurs irréductibles, dans l'anneau des polynômes à coefficients réels, de

$$P(X) = X^{2n} - 2\,X^n \cos\varphi + 1 .$$

2°/ Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère, dans le plan affine euclidien orienté, un polygone régulier de n sommets A_1, A_2, ..., A_n situés sur le cercle de centre O et de rayon R. P étant un point du plan distinct de O, on désigne par ℓ la norme de $\overrightarrow{OP}$ et par θ l'angle du couple de vecteurs $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA_1})$.

a) Démontrer que : $\|\overrightarrow{PA_1}\|^2 = \ell^2 - 2\,\ell\,R\cos\theta + R^2$, $\|\overrightarrow{PA_1}\|$ désignant la norme du vecteur $\overrightarrow{PA_1}$.

b) Etablir la relation :

$$\prod_{k=1}^{n} \|\overrightarrow{PA_k}\|^2 = \ell^{2n} - 2\,\ell^n R^n \cos n\theta + R^{2n} .$$

c) Montrer que si P est sur le cercle de centre O et de rayon R, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \|\overrightarrow{PA_k}\| = 2\,R^n \left|\sin\frac{n\theta}{2}\right| .$$

d) Simplifier l'expression trouvée au 2°/b) quand $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OA_1}$ sont colinéaires.

✽ 3°/ A_1, A_2, A_3 et A_4 étant les sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1, déterminer l'ensemble des points P du plan qui vérifient :

$$\|\overrightarrow{PA_1}\| \cdot \|\overrightarrow{PA_2}\| \cdot \|\overrightarrow{PA_3}\| \cdot \|\overrightarrow{PA_4}\| = 1 .$$

Représenter graphiquement cet ensemble.

DEUXIEME EXERCICE

On considère deux nombres réels strictement positifs α et β , et la fonction f d'une variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \quad f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x} .$$

1°/ a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f" , dérivée seconde de f , s'annule une fois et une seule sur $[0 , \frac{\pi}{2}]$.

Exprimer l'abscisse du point d'inflexion correspondant en fonction de α et β .

2°/ a) Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$; on appelle F celle qui s'annule en 0 .

b) Montrer que F(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3°/ Exprimer F sur $[0 , 2\pi[$.

4°/ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{49 - 45 \sin^2 x}$.

- 190 -

TROISIEME EXERCICE

Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{C}^1$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continuement dérivables sur $\mathbb{R}$ et par d l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{C}^1$; on note respectivement cos, sin, ch et sh les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1$ engendré par $\mathscr{B}$ = (cos, sin, ch, sh).

1°/ a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{F}$.

b) Montrer que $\mathscr{F}$ est stable par d .

c) Ecrire la matrice M de d dans la base $\mathscr{B}$.

d) Pour n entier positif, calculer M^n .

e) Montrer que d est un automorphisme de $\mathscr{F}$. Ecrire la matrice de d^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

2°/ On désigne par i l'identité dans $\mathscr{F}$ et on note f l'endomorphisme (d - i).

a) Déterminer le noyau et l'image de f.

b) Trouver les fonctions y de $\mathscr{F}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad y'(t) - y(t) = e^{-t} + \sin t .$$

3°/ On note g l'endomorphisme (d + i) .

a) Montrer que : fog = gof .

b) Déterminer l'image et le noyau de gof .

* c) On considère l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad y''(t) - y(t) = \operatorname{ch} t .$$

Trouver les fonctions de $\mathscr{F}$ vérifiant cette équation.

Trouver toutes les fonctions admettant une dérivée seconde sur R et vérifiant la même équation.

./

QUATRIEME EXERCICE

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On appelle $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et on pose $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} ; 0 \leq k \leq n\}$.

Les C_n^k désignant comme d'habitude les coefficients du développement de $(1 + X)^n$, on considère le polynôme $E_k = C_n^k X^k (1 - X)^{n-k}$ où k appartient à $\mathbb{N}_n$.

1°/ a) Déterminer le terme de plus haut degré et celui de plus bas degré dans chaque polynôme E_k.

b) Démontrer que la famille de polynômes $\{ E_k ; k \in \mathbb{N}_n \}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°/ a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} E_k$.

b) Montrer que : $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$, pour $k \geq 1$.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k E_k$.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) E_k$.

d) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (k - n X)^2 E_k = n X(1 - X)$.

3°/ Soit x un élément de $[0, 1]$ et α un élément de $]0, 1[$.

On pose : $K = \{k \in \mathbb{N}_n ; |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha\}$

$K' = \{k \in \mathbb{N}_n ; |\frac{k}{n} - x| < \alpha\}$.

./.

Par abus de notation, on appelle E_k la fonction polynôme associée au polynôme E_k.

a) Montrer que : $\sum_{k \in K} E_k(x) \leq \frac{x(1 - x)}{n \alpha^2}$.

b) En déduire que : $\sum_{k \in K} E_k(x) \leq \frac{1}{4 n \alpha^2}$.

✱ 4°/ Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle fermé et borné $[0, 1]$ (f est donc bornée et uniformément continue sur cet intervalle).

Pour tout entier positif n, on pose :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) E_k .$$

Montrer que pour tout ε réel strictement positif, il existe un entier positif N tel que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} , n \geq N\right) \Rightarrow \left(\forall x \in [0, 1] , |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right).$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail